① π حصہ اول (اعداد کی بنیادی اقسام)

فیس بک پر میرے چند پسندیدہ گروپس میں سے ایک "سائنس کی دنیا" گروپ ہے۔ اس گروپ میں برادرم طلحہ عبدالسلام چند قابلِ ستائش اور سائنس کا درد دل رکھنے والے احباب میں سے ہیں۔ آج کا موضوع ان ہی کے اعزاز پوچھے گئے ایک سوال پر مبنی ہے۔ نہ صرف انکا بلکہ شاید آپ نے بھی کبھی یہ سوال پوچھا ہو یا کم از کم سوچا ضرور ہوگا کہ "آخر کسی دائرے کا محیط (circumference) معلوم کرنے کے لیے π کی ضرورت کیوں پڑتی ہے؟" یا پھر یہ کہ π کی ویلیو (value) 3.14 ہی کیوں ہے؟ یا پھر یہ confusion کہ کیا واقعی π کی ویلیو (value) $\frac{22}{7}$ ہے؟

π بھائی صاحب بھی آپکو فزکس اور ریاضی کے اکثر فارمولاز میں براجمان نظر آتے ہیں۔ آخر کیوں؟ اس آرٹیکل کا مقصد اسی الجھن کی سلجھن کرنا ہے۔ اس الجھاؤ کی چند بنیادی وجوہات میں سے ایک وجہ اعداد کی اقسام و انواع کی صحیح سمجھ نہ ہونا ہے۔ اگر ہم ان اقسام کو سمجھ لیں تو اکثر اٹھنے والے ~~سوالات~~ سوالات کے جوابات مل جائیں گے۔

آپ نے ان چند بنیادی اعداد کی اقسام کو سمجھنے کی
کوشش کر لی ہے۔

مثلاً زندگی میں ہم کس طرح فیصلہ کرتے ہیں کہ ایک زیرِ غور
چیز معقول (Rational) ہے یا غیر معقول (Irrational)؟
شاید آپ میری اس وصف (Definition) سے اتفاق کریں
گے کہ وہ اشیاء یا تصورات معقول کہلائے جانے
چاہییں جو "بااصول" ہوں یعنی اپنی اصل میں
بعض اصولوں کی پابند ہوں یا ان اشیاء
کے تمام پہلو اُن اصولوں کی بنیاد پر سمجھے جا سکتے
ہیں۔ ~~یعنی~~ مثلاً ایک ایسا شخص جس کی فطرت
predictable ہو یا جو اس میں اچھا ~~کہلانے~~ اور
عقل مند و بااصول کہلانے کی تمام خصوصیات
ہوں تو آپ ایسے معقول شخص کہیں گے مگر
ایک ایسا شخص جس کی طبع یا برتاؤ Unpredictable
ہو یعنی کب وہ اچھا برتاؤ کرے گا کب برا
کچھ ~~کہا~~ نہ کہہ سکتے ہوں تو ایسے فرد پر
آپ نامعقولیت کے لفظ کا اطلاق کر سکتے ہیں۔

3

تقریباً اسی طرز پر آپ عمومی طور پر استعمال ہونے والے اعداد کو بھی دو بنیادی ~~اقسام~~ گروپس میں بانٹ سکتے ہیں۔ یعنی ارّیشنل ~~نمبرز~~ (irrational) اور ریشنل (Rational) اعداد

ایک ریشنل شخص کی طرح ریشنل نمبرز " بااصول " نمبرز ہوتے ہیں۔ جب کہ ارّیشنل اعداد اُن اصولوں سے آزاد ہوتے ہیں۔ اب آتے ہیں ان اصولوں کی طرف۔

ایک عدد کو ہم ریشنل عدد کہیں گے اگر وہ مندرجہ ذیل دو پیمانوں میں سے کسی ایک پیمانے (condition) پر پورا اترے۔

(a) ایک مثبت یا منفی عدد جو کہ دو قدرتی اعداد (1, 2, 3, ---) کا Ratio ہو۔ ریاضیاتی طور پر ایک عدد x ریشنل ہوگا اگر

$$\boxed{x = \frac{a}{b}, \quad \text{where } a, b = 1, 2, 3 \ldots \text{ and } b \neq 0.}$$

(4)

اس Definition کے مطابق تمام قدرتی اعداد ریشنل نہیں کیونکہ اگر کوئی قدرتی عدد n لیں اب چونکہ $n = \frac{n}{1}$ لہذا n ریشنل عدد ہے۔ دوسرے ایسے ریشنل عدد جو کہ قدرتی نہ ہوں انکی مثالیں $\frac{1}{3}$ ، $-\frac{2}{3}$ ، $\boxed{\frac{22}{7}}$ وغیرہ ہیں۔

b) دوسرا پیمانہ بیان کرنے سے پہلے یاد رکھیے کہ ہم fractions کو Decimal شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں مثلاً

$$\frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{1}{4} = 0.25$$

$$\frac{1}{3} = 0.333\ldots$$

ایسے Decimal کی شکل میں لکھے گئے عدد کہ جن میں پوائنٹ (.) کے بعد نمبرز کا سلسلہ کسی عدد پر جا کر رک جائے یا پھر Decimal پوائنٹ کے بعد اعداد ایک خاص pattern میں Repeat ہوں تو ان اعداد کو ہم ریشنل نمبرز کہہ سکتے ہیں۔

غور کیجیے کہ اوپر کی دی گئی تینوں مثالیں ریشنل اعداد کی ہیں۔ چند اور مثالیں پیش ~~کی~~ کی جاتی ہیں۔

$\boxed{1.32}$

یہ نمبر ریشنل ہے کیونکہ پوائنٹ کے بعد اعداد کا سلسلہ 2 پر ختم ہو جاتا ہے۔

23.56885327

اب چونکہ اعداد کا سلسلہ 7 پر جا کر رک جاتا ہے سو یہ نمبر بھی ریشنل ہے۔ اسی طرح

5.378378378—

بھی ریشنل ہے کیونکہ اس میں 378 کا pattern بار بار repeat ہو رہا ہے۔

بعض اوقات pattern کی repeatation فوری طور پر شروع نہیں ہوتی یعنی کافی اعداد کے بعد ایک pattern ابھر کر سامنے آتا ہے۔ ایسے اعداد کو بھی ہم ریشنل ہی کہیں گے۔ مثلاً

$\boxed{5.18932757575\text{—}}$

ریشنل اعداد کے ان دو پیمانوں کو سمجھنے کے بعد ایک سوال جو فطری طور پر ابھر کر ذہن میں آتا ہے وہ یہ ہے کہ ایک ہی تھیوری کی دو مختلف Descriptions یا Definitions کیونکر ہو سکتی ہیں؟ کیا Conditions (a اور (b دو مختلف چیزیں ہیں تو جواب ہے کہ نہیں۔ یہ ایک ہی بات کو کہنے کے دو مختلف طریقے ہیں۔ وہ اسطرح کہ اگر آپ پاس ایک نمبر $\frac{a}{b}$ کی شکل میں ہے اور اسے Decimals میں تبدیل کریں تو اسکی Decimal representation ہمیشہ یا تو کسی عدد پر جا کر رک جائے گی اور یا پھر اس میں repeated pattern ظاہر ہوگا۔ مثلاً

$$\frac{22}{7} = 3.142857142857\ldots$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اوپر دی گئی equation کی right side کی پیمائش (b کو satisfy کر رہی جبکہ left side condition (a کو۔ لہٰذا یہ ایک ریشنل نمبر ہے

بالکل اسی طرح condition (b سے condition (a کو derive کر سکتے ہیں۔ یعنی ایک ایسا نمبر

کہ جس میں Decimal پوائنٹ کے بعد اعداد کا
سلسلہ رک جائے یا پھر pattern کی Repeatation ہو تو
ہمیشہ ایسے عدد کو fraction یعنی $\frac{a}{b}$ شکل میں لکھا جا سکتا
ہے۔ مثلاً 3.2 کو آپ $\frac{16}{5}$ یا $\frac{32}{10}$ کی شکل
میں لکھ سکتے ہیں۔ repeated pattern کا معاملہ دلچسپ
ہے۔ کیونکہ ایسے $\frac{a}{b}$ شکل میں لکھنا زیادہ آسان نہیں ہے۔
مثلاً $0.33333---$ کو $\frac{a}{b}$ شکل میں لکھنے کے لیے
مندرجہ ذیل ٹرک کو استعمال کرنا ہوگا۔

$$0.333--- = 0.3 + 0.03 + 0.003 + \cdots$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + ---$$

$$= 3\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ---\right) \rightarrow (*)$$

$$= 3 \times \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

اوپر دی گئی تفصیل کے step (*) پر ہم
نے Geometric series کے ~~cut~~ sum کا فارمولا
استعمال کیا ہے۔ جس کی Detail میں جانا اس
وقت مقصود نہیں۔ اس پوری تمہید کا مقصد
صرف یہ تھا کہ condition a) اور b) ریشنل اعداد
کو سمجھنے کے دو ہم معنی طریقے ہیں۔

اب وہ اعداد جو اصول a اور b میں سے
کسی بھی اصول کے پابند نہ ہوں ان کو علم غیر
معقول یا irrational نمبرز کہیں گے۔ یعنی ایسے اعداد
جن کو نہ $\frac{a}{b}$ شکل میں لکھا جا سکے اور نہ
انکی Decimal representation میں اعداد کا سلسلہ کہیں
نہ رکے یا وہ کوئی pattern فالو نہ کریں
تو وہ irrational نمبرز کہلائے جائیں گے۔
انکی چند مشہور مثالیں ہیں π ، e ، $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{n}$ (جہاں n
پرفیکٹ اسکوائر نہیں ہیں)۔

$$e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = 2.71828\ldots$$

$$\pi = 3.141592\ldots$$

$$\sqrt{2} = 1.4142135\ldots$$

اور ہر ایک کی decimal representation نہ ختم ہوتی
ہیں اور نہ ہی ان میں کوئی repeatation آتی ہے۔
آپ یہ سوال پوچھنے میں حق بجانب ہونگے کہ
بھائی ہم کیسے مان لیں کہ ان میں repeatation
نہیں آئے گی آگے چل کر۔ یا پھر ہو سکتا ہے کہ

پوائنٹ کے بعد یہ سلسلہ کسی عدد پر رک جائے، تو
اس کا جواب یہ ہے کہ ان اعداد کی غیر معقولیت
(irrationality) کو مختلف طریقوں سے ثابت کیا جا سکتا ہے
جن کی تفصیل میں جانے کے لیے کافی وقت اور مشقت
چاہیے ہوگی۔ مزید یہ کہ انتہائی جدید طرز کے
کمپیوٹرز کے ذریعے ان کے decimal اشکال
لاکھوں اعداد تک generate کی گئی ہیں مگر اعداد
میں نہ تو کوئی repeatation ظاہر ہوتی ہے اور نہ ہی سلسلہ
کہیں رکتا ہے۔

امید ہے کہ اس تفصیلی تحریری گفتگو کے بعد آپ
ریشنل اور اریشنل اعداد کے فرق، ان کی مثالیں
اور تھوڑا سا فلسفہ سمجھ چکے ہوں گے۔ اب ان دونوں
گروپس کو سیٹ کی شکل میں لکھتے ہیں

$$\boxed{\begin{array}{l} Q = \text{Set of rational numbers} \\ Q^c \text{ (or } I) = \text{Set of irrational numbers} \\ \mathbb{R} = Q \cup Q^c \end{array}}$$

یہاں $\mathbb{R}$ سے مراد تمام ریشنل اور اریشنل کا

سیٹ ہے جسے ہم Real اعداد کا نام دیتے ہیں۔
اب تک جتنی بھی بحث ہوئی ہے اس میں سے شاید زیادہ تر
سے آپ واقف ہوں۔ اب میں آپکو Irrational نمبرز
میں چھپے بھیدے "تفصیلے" اِریشنل نمبر سے تعارف
کرواتا ہوں۔ ان کو سمجھنے کے لیے آئیں ایک
گیم کھیلتے ہیں۔! چلیں اسکا نام میں الجبرا۔ الجبرا
گیم رکھتا ہوں۔ ~~اس گیم کا~~

اس گیم میں بنیادی طور پر کرنا یہ ہے کہ آپکو
ایک نمبر دیا جائیگا اور آپکو اس نمبر کو 0 (Zero)
میں تبدیل کرنا ہے۔ اسکے لیے آپ ...,0,1,2,3
میں سے کسی بھی نمبر کا استعمال کر سکتے ہیں۔ اسکے
علاوہ $( )^n$ ،×، −، + کا استعمال کر سکتے
ہیں۔ یہاں $( )^n$ سے مراد آپ دیئے گئے
نمبر کو کوئی بھی پاور لے سکتے ہیں۔ مثال سے سمجھنے
کی کوشش کرتے ہیں۔

فرض کیجئے ہم 3 لیتے ہیں۔ اب ہم 3

کے ساتھ کیا کریں یہ زیرو بن جائے؟ تو جواب یہ ہو سکتا ہے کہ 0,1,2,3,4, لسٹ میں سے 5 اٹھائیے اور − کا آپریشن اٹھائیے اور پھر

$$5-5=0 \rightarrow (i)$$

یعنی 5 کو زیرو بنانے کے لیے ہم 5 تفریق کر سکتے ہیں.

دوسری مثال اب ہم چلیں $\sqrt{2}$ لیتے ہیں؟ اب ذرا گیم کے اصولوں پر نظر دوڑائیے۔ اسے ہم کس طرح زیرو کر سکتے ہیں؟ چلیں ایک کام کرتے ہیں $\sqrt{2}$ کو square کیجیے (یعنی "( )" کا استعمال) اور پھر 0,1,2,3,4 لسٹ میں سے 2 اٹھائیے

اب

$$(\sqrt{2})^2 - 2 = 0 \rightarrow (ii)$$

تیسری مثال میں ہم $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ لیتے ہیں. اب معاملہ ذرا پیچیدہ ہے. کیا ہونا چاہیے؟ پہلے step میں اسے square کرتے ہیں.

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3$$
$$= 5 + 2\sqrt{6}$$

اب 5 تفریق کر دیجیے

$$5+2\sqrt{6}-5 = 2\sqrt{6}$$

⑫ اب ہم $2\sqrt{6}$ کو square کریں گے یعنی

$$(2\sqrt{6})^2 = 4 \times 6 = 24$$

آخر میں جواب میں سے 24 تفریق کر دیجیے یعنی $24 - 24 = 0$ ۔ خلاصہ یہ کہ $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ کو زیرو بنانے کے لیے ہم

$$\left((\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 5\right)^2 - 24 = 0 \rightarrow (iii)$$

کر سکتے ہیں۔

یہ آخر ہو کیا رہا ہے؟ ایک کام کیجیے تینوں دی گئی مثالوں میں آپ کو دیے گئے نمبر کی جگہ x ڈال دیں تو مساوات (i)، (ii) اور (iii) کی شکل کچھ اس طرح ہو گی

$$x - 5 = 0$$
$$x^2 - 2 = 0$$
$$(x^2 - 5)^2 - 24 = 0$$

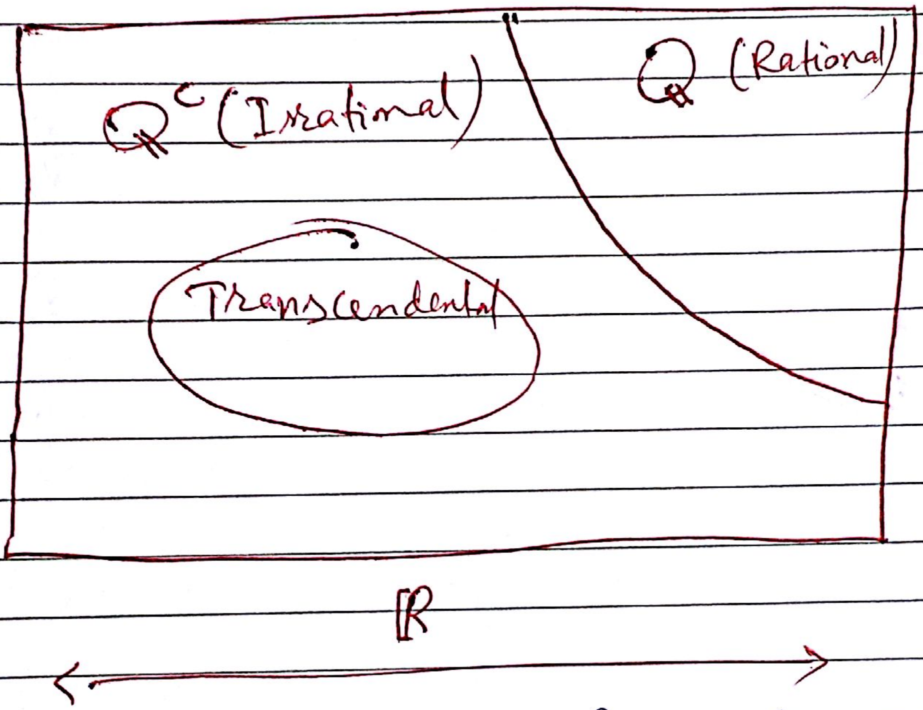
آئیے اب اس پوری کہانی کا مقصد سمجھتے ہیں۔ جب ہم الجبرا - الجبرا کھیل رہے ہوتے ہیں تو دراصل الجبرا کی equation حل کر رہے ہوتے ہیں۔

یاسر جیہ

دوسرے لفظوں میں ہم یہ کہہ رہے ہیں کہ آپ کو
ایک نمبر دے کر پوچھا جا رہا ہے کہ کیا یہ نمبر
کسی الجبرا کی مساوات کا حل ہے؟ کہ جس میں
صرف قدرتی اعداد ہی co-efficients ہوں؟ ہم نے دیکھا کہ
$\sqrt{2}$ ، $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ اور $\sqrt{5}$ کے ساتھ یہ کھیل کھیلا جا سکتا
ہے یعنی یہ اعداد کسی نہ کسی مساوات کا حل ہیں۔
کیا یہ تمام نمبرز کیلئے کھیلا جا سکتا ہے؟ π اور
e کے لیے کوشش کیجیے؟

اگر کوشش کر چکے تو سمجھ لیجیے کہ π اور e
کے لیے ایسا ممکن نہیں یعنی کسی بھی الجبرا کی
ریشنل co-efficent والی مساوات کا حل نہیں ہو
یعنی ہم کہہ سکتے ہیں یہ اعداد گویا الجبرا سے
ماوراء ہیں اور بس اسی لیے انکو Transcendental
اعداد کہا جاتا ہے۔ یعنی جو الجبرا کو
Transcend کر گئے ہیں۔ صرف یہ ہی نہیں
Transcendental اعداد کی تعداد لامحدود ہے۔ یہ ایسے
اعداد ہیں جنکو کسی بھی ریشنل اور اِرریشنل نمبر

میں جمع تفریق یا ضرب کر دیا جائے پھر بھی ان کو
Transcendental ہی بنا دیتے ہیں



اوپر دی گئی تصویر یہ بتا رہی ہے کہ Real اعداد
یا تو Rational ہوتے ہیں یا Irrational۔ اور پھر
Irrationals کے درمیان کچھ خاص irratinal یعنی
اعداد (Transcendental) یعنی الجبرا سے ناراض سمجھے
اس پوری توجیہ کے بعد اب ہم π کی اصل
جگہ جان چکے ہیں کہ کتنا دلچسپ و عجیب
نمبر ہے۔ پہلا یہ کہ π ارریشنل ہے پھر یہ کہ
Transcedental یعنی الجبرا سے ناراض نمبر بھی ہے

دوسرا یہ کہ کبھی بھی $\frac{22}{7}$ یا $\sqrt[3]{31}$ یا اس قسم کا بھی نمبر کے برابر نہیں ہو سکتا کیونکہ Transcendental ~~ہے~~ $\frac{22}{7}$ ریشنل ہے اور $\sqrt[3]{31}$ بھی نہیں تو برابری نہ ممکن ہے۔

~~مگر کیا آپ~~

بات کو آج کے لیے یہیں ختم کرتا ہوں
دوسرے حصے میں اصل مدعا یعنی circle میں π کے ظہور کی طرف آؤں گا۔ جاتے جاتے آپ کے لیے ایک سوچنے کی اسائنمنٹ
کیا جانتا ہے کہ Euler's identity دنیا کی سب سے خوبصورت esuation ہے

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}$$

کیا اب آپ اس esuation کی خوبصورتی دیکھ سکتے ہیں؟ دونوں اطراف غور سے کبھی Shock لگا؟ ایک طرف ٹرانسن e اور π دوسری طرف معصوم سا 1- .

☺ جاری ہے ۔۔۔!